2024-2025

# Physique générale : quantique, Corrigé 11


*Assistants et tuteurs :*

elena.acinapura@epfl.ch
sara.alvesdossantos@epfl.ch
felice.bordereau@epfl.ch
jeanne.bourgeois@epfl.ch
sofia.brizigotti@epfl.ch
thomas.chetaille@epfl.ch
marco.dimambro@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
douaa.salah@epfl.ch
arianna.vigano@epfl.ch


## Exercice 1 : Un atome "muonique"

Nous savons que le rayon de Bohr pour un électron qui orbite autour d'un proton vaut :

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5.3 \cdot 10^{-11}m$$

Pour un $\mu$ -méson dont la masse est 207 fois plus grande et pour un noyau de xénon de charge $Z = 54$ nous avons donc $a_{Z,\mu} = \frac{a_0}{207 \cdot Z} = 4.74 \cdot 10^{-15}m$. Le rayon du noyau de $X_e$ vaut $R = r_0(131)^{1/3} = 6.2 \cdot 10^{-15}m$ donc $R/a_{Z,\mu} = 1.31$ et un muon se trouve plutôt à l'intérieur du noyau. La probabilité de trouver un $\mu^-$ - méson à l'intérieur du noyau (c'est a dire entre $r = 0$ et $r = R$ ) est donnée par l intégrale :

$$p = \int_0^R 4\pi r^2 \psi_{1s}^2(r)dr = \frac{4}{a^3}\int_0^R r^2 \exp(-2r/a)dr$$

Nous avons :

$$\int_0^x r^2 \exp(-2r/a)dr = -\frac{ax^2}{2}\exp(-2x/a) - \frac{a^2x}{2}\exp(-2x/a) - \frac{a^3}{4}\exp(-2x/a) + \frac{a^3}{4}.$$

Donc

$$\frac{4}{a^3}\int_0^R r^2 \exp(-2r/a)dr = -\frac{2R^2}{a^2}\exp(-2R/a) - \frac{2R}{a}\exp(-2R/a) - \exp(-2R/a) + 1 = 0.49$$

Puisque le muon est très proche du noyau, on peut considérer le noyau + le muon comme un noyau effectif de charge $Z - 1$. Ce noyau effectif a un plus grand rayon que le noyau initial, mail il reste petit comparé à la taille de l'atome. En prenant en compte les $Z - 1$ électrons restant, les caractéristiques chimiques de cet atome sont donc plus proches de celles de l'atome d'iode.

## Exercice 2 : Atome d'hydrogène : Effet de la masse réduite

La masse réduite du positronium est plus petite que celle de l'hydrogène, donc l'énergie du photon sera plus petite pour le positronium que pour l'hydrogène. Cela signifie que la longueur

d'onde du photon émis sera plus grande que 656.3 nm. D'un autre côté, l'hélium a à peu près la même masse réduite mais plus de charges que l'hydrogène, donc sa transition d'énergie sera plus grande, correspondant à une longueur d'onde plus petite que 656.3 nm. Tous les facteurs de l'équation donnée sont constants pour ce problème à part pour la masse réduite et la charge nucléaire. Par conséquent, la longueur d'onde correspondant à la différence d'énergie pour la transition peut être trouvée simplement à partir des ratios des variables de masses et de charges.
Pour l'hydrogène,

$$m_u = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} \approx m_e$$

L'énergie du photon est $\Delta E = E_3 - E_2$.
Sa longueur d'onde est $\lambda = 656.3$ nm, où $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{\Delta E}$.

(a) Pour le positronium, $\mu = \frac{m_e m_e}{m_e + m_e} = \frac{m_e}{2}$,

donc l'énergie de chaque niveau est la moitié de celle de l'hydrogène. L'énergie du photon est inversement proportionnelle à sa longueur d'onde, donc pour le positronium,

$$\lambda_{32} = 2(656.3 \text{ nm}) = 1.31 \mu\text{m}$$

(dans la région infrarouge)

(b) Pour $\text{He}^+, \mu \approx m_e, q_1 = e$ and $q_2 = 2e$, donc la transition d'énergie est $2^2 = 4$ fois plus grande que celle de l'hydrogène. Ensuite, $\lambda_{32} = \left(\frac{656}{4}\right)$ nm $= 164$ nm (dans la région des ultraviolets).

## Exercice 3 : Les isotopes

1. Pour une transition de $n_i$ à $n_f$,

$$\Delta \mathrm{E}_H = -\frac{\mu_H \mathrm{k}_e^2 \mathrm{e}^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{\mathrm{n}_f^2} - \frac{1}{\mathrm{n}_i^2} \right) = \frac{\mathrm{hc}}{\lambda_H}$$

et

$$\Delta E_D = -\frac{\mu_{\mathrm{D}} k_{\mathrm{e}}^2 e^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = \frac{hc}{\lambda_D}$$

où $\mu_{\mathrm{H}} = \frac{m_e \mathrm{m}_p}{\mathrm{m}_e + \mathrm{m}_p}$ et $\mu_{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{m}_e \mathrm{m}_D}{\mathrm{m}_e + \mathrm{m}_D}$.

Par division,

$$\frac{\Delta \mathrm{E}_H}{\Delta \mathrm{E}_D} = \frac{\mu_{\mathrm{H}}}{\mu_{\mathrm{D}}} = \frac{\lambda_{\mathrm{D}}}{\lambda_{\mathrm{H}}}$$

ou

$$\lambda_{\mathrm{D}} = \left( \frac{\mu_{\mathrm{H}}}{\mu_{\mathrm{D}}} \right) \lambda_{\mathrm{H}}$$

.
Puis, $\lambda_H - \lambda_D = \left(1 - \frac{\mu_{\mathrm{H}}}{\mu_{\mathrm{D}}}\right) \lambda_{\mathrm{H}}$

2.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu_H}{\mu_D} &= \left(\frac{m_e m_p}{m_e + m_p}\right)\left(\frac{m_e + m_D}{m_e m_D}\right) \\
&= 0.999728 \\
\lambda_H - \lambda_D &= (1 - 0.999728)(656.3 \text{ nm}) = 0.179 \text{ nm}
\end{aligned}
$$

## Exercice 4 : Le rayon de l'atome d'hydrogène

1. Il ne faut pas imaginer l'électron en orbite autour du proton comme dans la théorie de Bohr de l'atome d'hydrogène. Imaginez plutôt la charge de l'électron dispersée dans l'espace autour du proton dans un nuage électronique avec une symétrie sphérique. Puisque l'énoncé demande "la valeur la plus probable de $r$", nous allons utiliser l'approche quantique. (Dans l'atome de Bohr, l'électron bouge dans une orbite avec un valeur exacte de $r$).
La valeur la plus probable de $r$ correspond au maximum dans le plot de $P_{1s}(r)$ versus $r$. Nous pouvons évaluer la valeur la plus probable de $r$ en posant $dP_{1s}/dr = 0$ et en résolvant pour $r$. On fait la dérivée et on pose le résultat égal à zéro :

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_{1s}}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right)e^{-2r/a_0}\right] &= 0 \\
e^{-2r/a_0}\frac{d}{dr}\left(r^2\right) + r^2\frac{d}{dr}\left(e^{-2r/a_0}\right) &= 0 \\
2re^{-2r/a_0} + r^2\left(-2/a_0\right)e^{-2r/a_0} &= 0 \\
2r\left[1 - (r/a_0)\right]e^{-2r/a_0} &= 0
\end{aligned}
$$

On met l'expression entre parenthèses égale à zéro et on résout pour r :

$$
1 - \frac{r}{a_0} = 0 \rightarrow \quad r = a_0
$$

La valeur la plus probable de $r$ est le rayon de Bohr ! L'équation est aussi satisfaite à $r = 0$ et quand $r \rightarrow \propto$. Ces points correspondent à la probabilité minimum, qui est nulle.

2. La probabilité est trouvée en intégrant la fonction de densité de la probabilité radiale $P_{1s}(r)$ pour cet état du rayon de Bohr, de $a_0$ à $\infty$.

$$
P = \int_{a_0}^{\infty} P_{1\text{s}}(r)dr = \frac{4}{a_0^3}\int_{a_0}^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0}dr
$$

Il faut mettre l'intégrale dans une forme sans dimension en changeant les variables de $r$ à $z = 2r/a_0$, en notant que $z = 2$ quand $r = a_0$ et que $dr = (a_0/2)\,dz$ :

$$
P = \frac{4}{{a_0}^3}\int_2^{\infty}\left(\frac{za_0}{2}\right)^2 e^{-z}\left(\frac{a_0}{2}\right)dz = \frac{1}{2}\int_2^{\infty} z^2 e^{-z}dz
$$

On évalue l'intégrale en utilisant l'intégration partielle :

$$P = -\frac{1}{2}\left(z^2+2z+2\right)e^{-z}\Big|_2^{\infty} \tag{1}$$

On évalue ensuite entre les limites :

$$P = 0 - \left[-\frac{1}{2}(4+4+2)e^{-2}\right] = 5e^{-2} = 0.677 \text{ or } 67.7\%$$

Cette probabilité est plus grande que 50%. La raison de cette valeur est l'assymétrie dans la fonction de densité de probabilité radiale, qui a plus d'aire à droite du pic qu'à gauche.

3. La valeur moyenne de $r$ est la même que la valeur attendue pour $r$.

$$\begin{aligned} r_{\text{avg}} = < r > &= \int_0^{\infty} rP(r)dr = \int_0^{\infty} r\left(\frac{4r^2}{{a_0}^3}\right)e^{-2r/a_0}dr \\ &= \left(\frac{4}{{a_0}^3}\right)\int_0^{x} r^3 e^{-2r/a_0}dr \end{aligned}$$

$$r_{avg} = \left(\frac{4}{a_0^3}\right)\left(\frac{3!}{(2/a_0)^4}\right) = \frac{3}{2}a_0$$

De nouveau, la valeur moyenne est plus grande que la valeur la plus probable en raison de l'asymétrie de la fonction d'onde.

## Exercice 5 : Question de type examen

En suivant la même procédure que dans l'exercice précédent,

$$\text{Prob}[0 \le r \le r_p] = \int_0^{r_p} \frac{4r^2}{a_0^3}e^{-2r/a_0} \tag{2}$$

Nous effectuons le même changement de variable, c'est-à-dire $z = 2r/a_0$. Notez que dans ce cas, l'intégrale est de $r = 0$ à $r = r_p$, et donc de $z = 0$ à $z = 2r_p/a_0$. En réalisant l'intégration, nous obtenons une équation équivalente à (1) :

$$\text{Prob}[0 \le r \le r_p] = -\frac{1}{2}\left(z^2+2z+2\right)e^{-z}\Big|_0^{2r_p/a_0} = 1 - e^{-2r_p/a_0} - \frac{2r_p}{a_0}e^{-2r_p/a_0} - \frac{2r_p^2}{a_0^2}e^{-2r_p/a_0} \tag{3}$$

En substituant la valeur numérique de $r_p$, nous arrivons à $\text{Prob}[0 \le r \le r_p] \approx 5.2 \cdot 10^{-15}$

## Exercice 6 : Question de type examen

Nous définissons $R = 4a_0$. La probabilité est alors égale

$$P = \int_R^{\infty} \mathrm{d}r\, \frac{r^2}{8a_0^3}\left(4 + \frac{r^2}{a_0^2} - 4\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/a_0} \tag{4}$$

En définissant les intégrales

$$I_n = \int_{R/a}^{\infty} \mathrm{d}t \; t^n e^{-t} \tag{5}$$

et en effectuant un changement de variables, la probabilité se ré-écrit comme

$$P = \frac{I_2}{2} + \frac{I_4}{8} - \frac{I_3}{2}. \tag{6}$$

Nous devons maintenant simplement calculer $I_n$ avec les expressions données,

$$I_2 = 26e^{-4} \quad I_3 = 142e^{-4} \quad I_2 = 824e^{-4}$$

Par conséquent,

$$P = e^{-4} \cdot \left( \frac{26}{2} + \frac{824}{8} - \frac{142}{2} \right) \approx 82.4\% \tag{7}$$